

تعریف: یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است. معمولاً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می‌شود. ($\alpha = 1 \text{ rad}$)

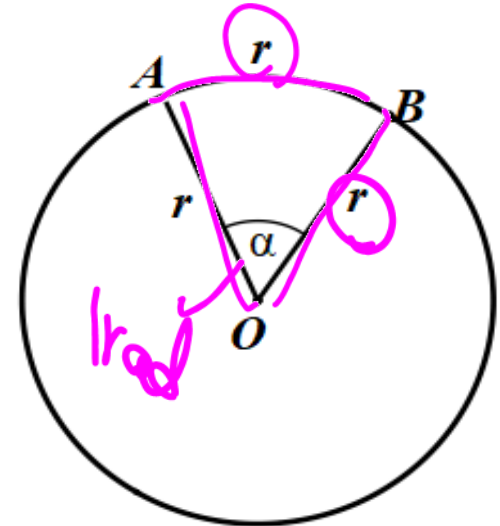
نکته:

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi r}{r} \rightarrow \alpha = 1 \text{ rad} = \frac{1}{2\pi} \times 360^\circ \cong 57 / 32$$

۵۷۰

۶ rad

۲۲ / ۷۱۰ ربع

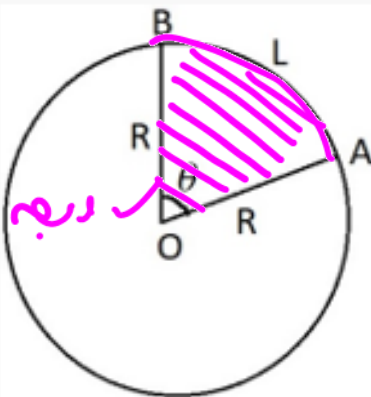


پویش علمی
ماندگار البرز



$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

نکته) اگر اندازه زاویه مرکزی θ بر حسب رادیان باشد، طول کمان L روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع R از رابطه $L = R\theta$ بدست می‌آید. در دایره مقابل، OAB را قطاعی از دایره گوئیم. اگر زاویه θ بر حسب رادیان باشد، محیط و مساحت این قطاع به صورت زیر به دست می‌آیند:



$$P = \underline{2R} + L = \underline{2R} + \underline{R\theta}, \quad S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} RL$$

$$S = \frac{1}{2} R(R\theta)$$



نکته: در سوالات چرخیدن دو قرقره متصل به یک تسمه یا چرخیدن دو چرخ وسیله‌ای که چرخ‌هایی که شعاع‌های نابرابر دارند، طول کمان‌های طی شده را برابر قرار می‌دهیم. یعنی:

$$L_1 = L_2 \rightarrow r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2$$

مدرس: افخمی



پویش علمی
ماندگار البرز





مثال ۱: طول برف پاک کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی متر است. فرض کنید برف پاک کن کمانی به اندازه ۱۲۰° درجه را طی می‌کند. ($\pi = ۳/۱۴$)

الف) اندازه کمان را بر حسب رادیان بیابید.

اندازه زاویه مرکزی

ب) طول کمان طی شده در نوک برف پاک کن چند سانتیمتر است؟

مدرس: افخمی

$$۱۲۰^\circ = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$R = ۱۲۰^\circ = \frac{۲\pi}{۳} \quad \text{الف)}$$

$$l = r\theta \Rightarrow l = ۲۴\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) \approx ۵۰.۲۴ \quad \text{ب)}$$

مثال ۲: پاندول یک ساعت دیواری به طول ۳۰ سانتی متر، در هر ثانیه به اندازه ۷۰ درجه حرکت میکند. طول کمان طی شده انتهای پاندول، چند سانتی متر می باشد؟ ($\pi = ۳$)

مدرس: افخمی

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{۷۰}{۱۸۰} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{۷۰\pi}{۱۸۰}, \quad l = r\theta \Rightarrow l = ۳۰ \times \frac{۷۰ \times ۳}{۱۸۰} = ۳۵cm$$



$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

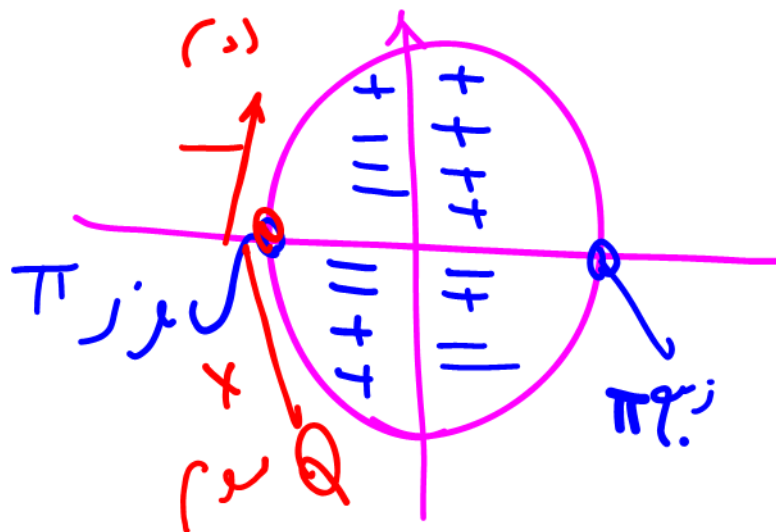


$$\left\{ \begin{aligned}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) &= -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos(-45^\circ) &= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -1 \\ \cot(-60^\circ) &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}\right.$$

مدرس: افخمی

پویش علمی
ماندگار البرز

$$\begin{aligned}\sin(\cancel{2k}\pi \pm \alpha) &= \sin(\pm \alpha) \\ \cos(\cancel{2k}\pi \pm \alpha) &= \cos(\pm \alpha) \\ \tan(\cancel{2k}\pi \pm \alpha) &= \tan(\pm \alpha) \\ \cot(\cancel{2k}\pi \pm \alpha) &= \cot(\pm \alpha)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sin(\underbrace{(2k+1)\pi - \alpha}_{\boxed{2}}) &= + \sin \alpha \\ \cos(\underbrace{(2k+1)\pi - \alpha}_{\boxed{2}}) &= - \cos \alpha \\ \tan(\underbrace{(2k+1)\pi - \alpha}_{\boxed{2}}) &= - \tan \alpha \\ \cot(\underbrace{(2k+1)\pi - \alpha}_{\boxed{2}}) &= - \cot \alpha\end{aligned}$$

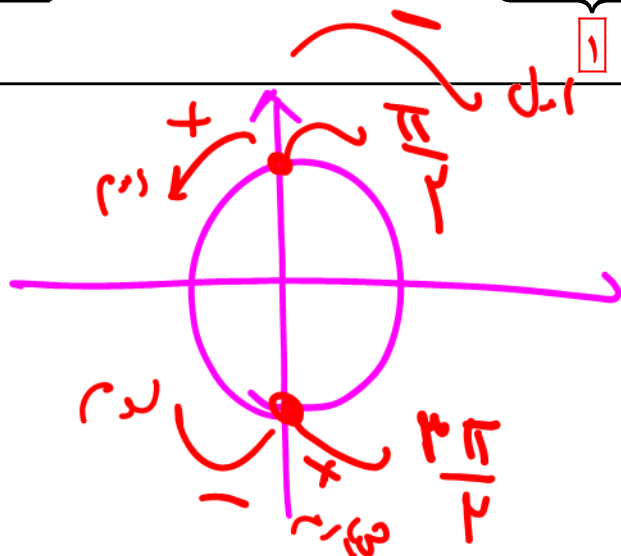
$$\begin{aligned}\sin(\underbrace{(2k+1)\pi + \alpha}_{\boxed{3}}) &= - \sin \alpha \\ \cos(\underbrace{(2k+1)\pi + \alpha}_{\boxed{3}}) &= - \cos \alpha \\ \tan(\underbrace{(2k+1)\pi + \alpha}_{\boxed{3}}) &= + \tan \alpha \\ \cot(\underbrace{(2k+1)\pi + \alpha}_{\boxed{3}}) &= + \cot \alpha\end{aligned}$$



$$\sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \alpha}_1\right) = +\cos \alpha \quad \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \alpha}_1\right) = +\sin \alpha$$

از لکد مت - بهر تغییر من

$$\tan\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \alpha}_1\right) = +\cot \alpha \quad \text{اگر } \cot\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \alpha}_1\right) = +\tan \alpha$$



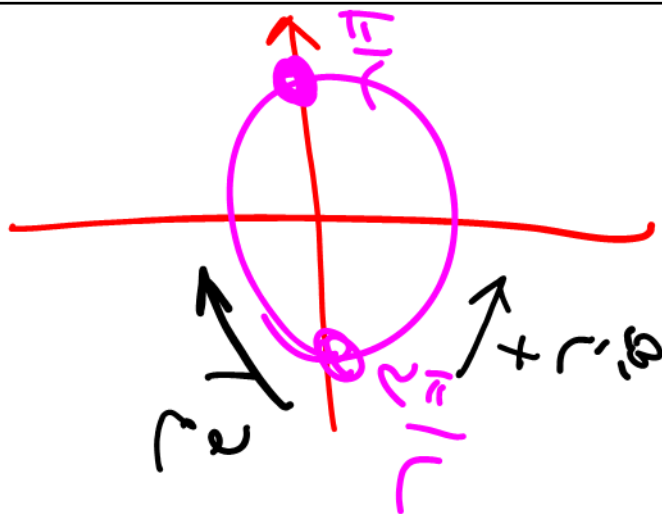
$$\sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \alpha}_2\right) = +\cos \alpha \quad \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \alpha}_2\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \alpha}_2\right) = -\cot \alpha \quad \cot\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \alpha}_2\right) = -\tan \alpha$$

هستند

$$\sin \underbrace{\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}_{\boxed{3}} = \ominus \cos \alpha \quad \cos \underbrace{\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}_{\boxed{3}} = \ominus \sin \alpha$$

$$\tan \underbrace{\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}_{\boxed{3}} = \oplus \cot \alpha \quad \cot \underbrace{\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}_{\boxed{3}} = \oplus \tan \alpha$$



$$\sin \underbrace{\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)}_{\boxed{4}} = \ominus \cos \alpha \quad \cos \underbrace{\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)}_{\boxed{4}} = \oplus \sin \alpha$$

$$\tan \underbrace{\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)}_{\boxed{4}} = \ominus \cot \alpha \quad \cot \underbrace{\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)}_{\boxed{4}} = \ominus \tan \alpha$$

مثال ۳: حاصل عددی $A = \sin 30^\circ + \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)$ را به دست آورید.

مدرس: افخمی

$$\begin{aligned}
 A &= \sin(30^\circ) + \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin(\cancel{30^\circ} - 6^\circ) + \cos\left(\cancel{\frac{1\pi}{4}} + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= -\sin 6^\circ + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۴: حاصل عددی $\sin\left(\frac{-19\pi}{6}\right) \tan\left(\frac{14\pi}{4}\right)$ را به دست آورید.

مدرس: افخمی



پویش علمی
ماندگار البرز

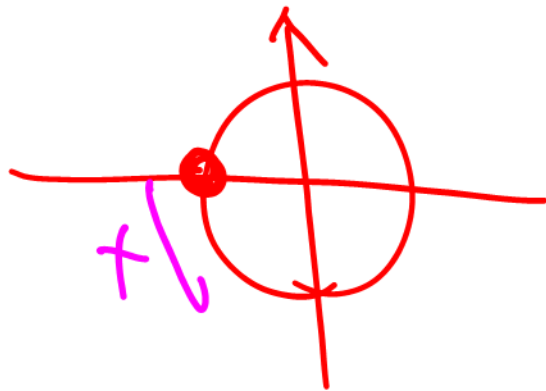


پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

$$= \frac{1}{2}$$

$$-\sin \frac{\pi}{4}$$

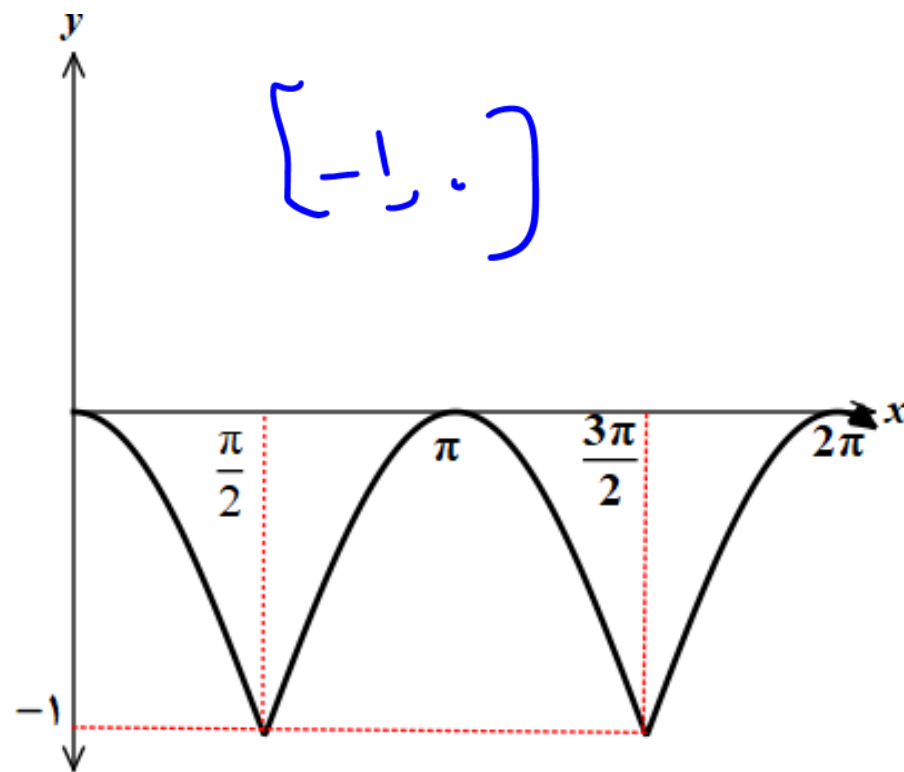
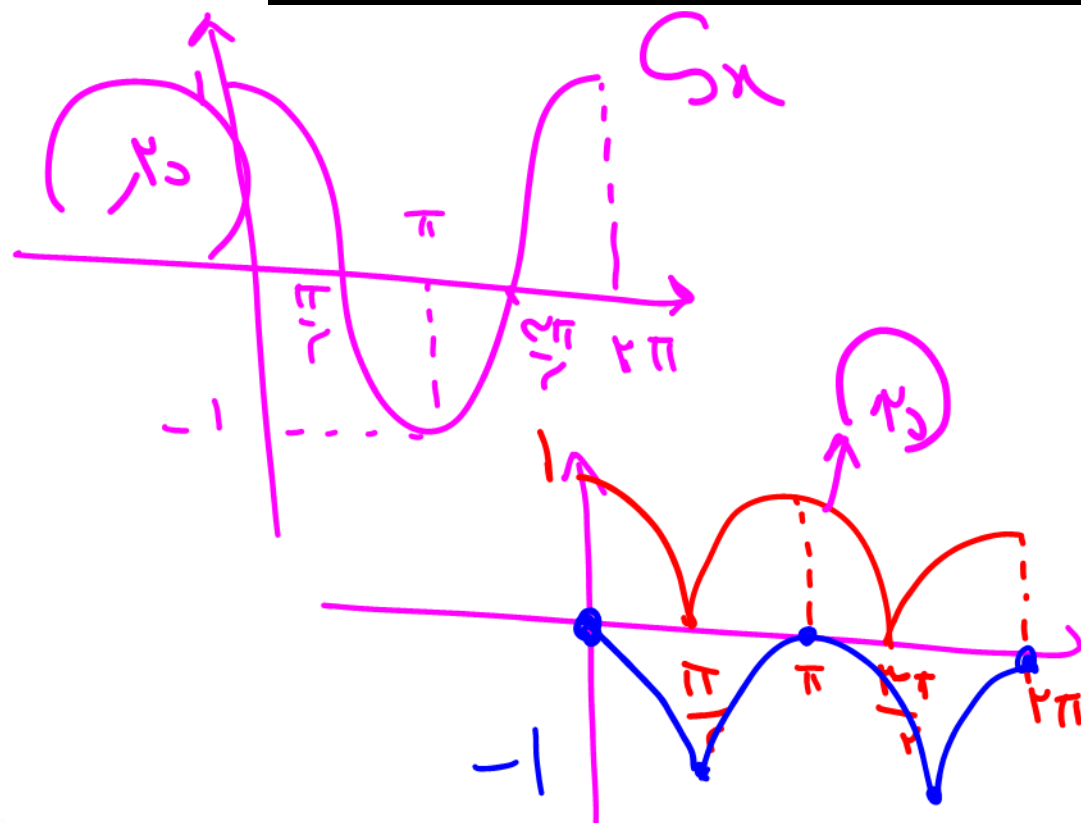
$$-\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(\cancel{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$$



$$-1$$

مثال ۵: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = |\cos(x)| - 1; x \in [0, 2\pi]$ را رسم کنید.

مدرس: افخمی

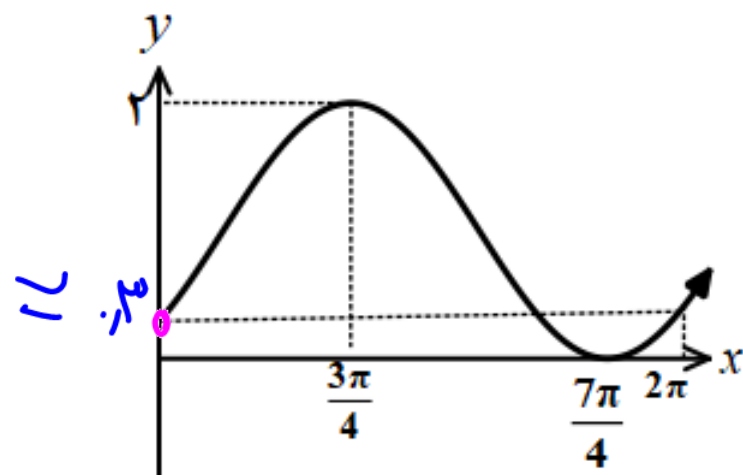
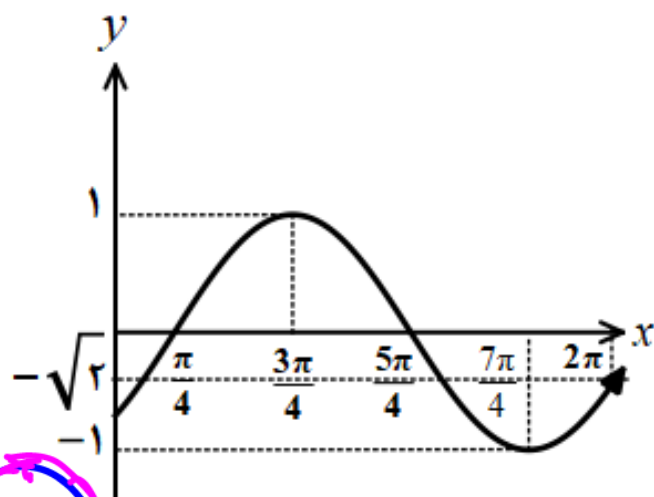
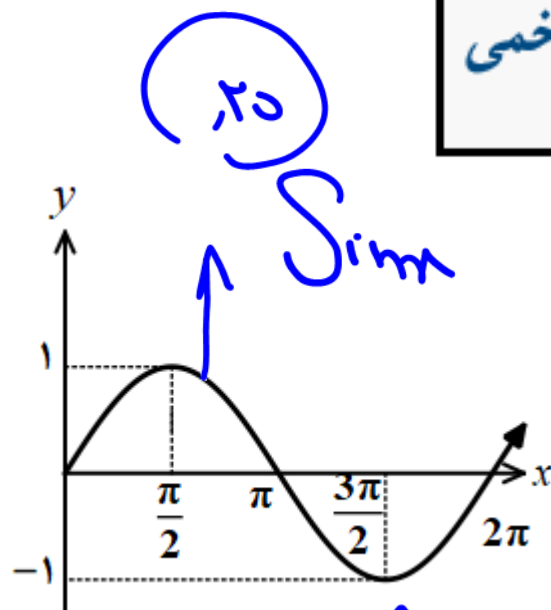


پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۶: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1; x \in [0, 2\pi]$ را رسم کنید.

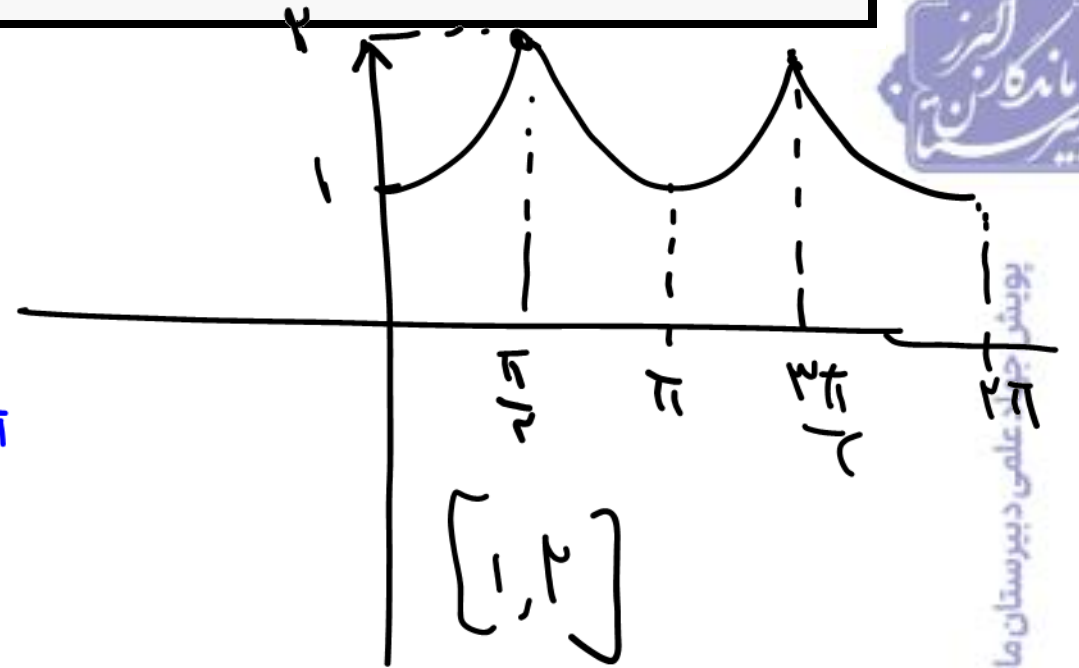
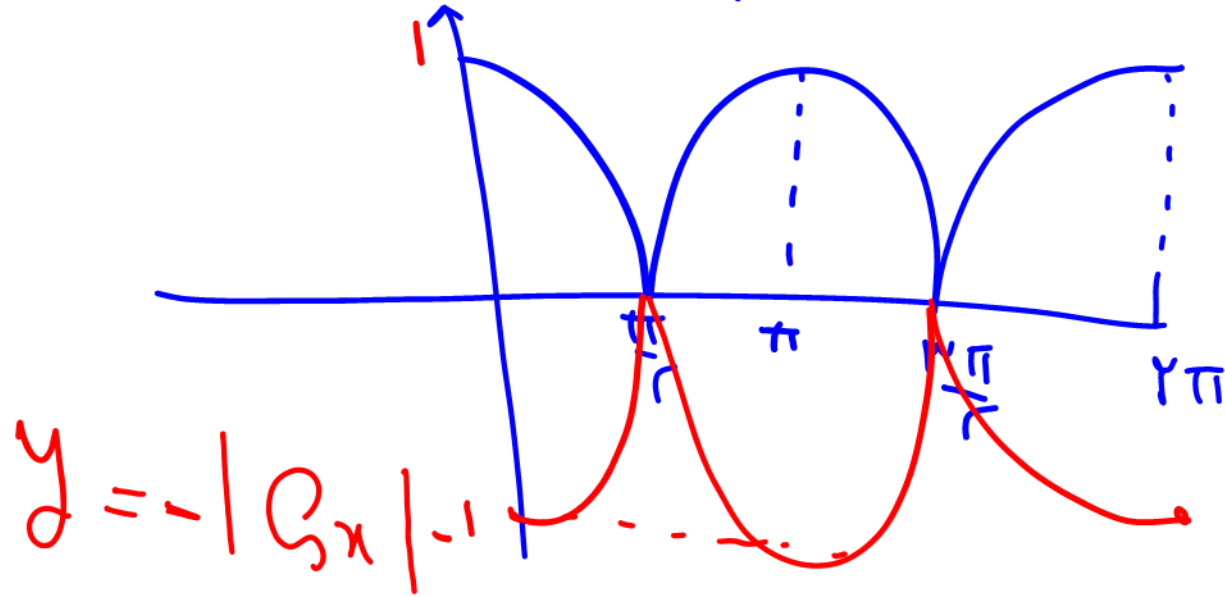
مدرس: افخمی



مثال ۷: نمودار تابع با ضابطه $y = -|\cos x| + 2$ را رسم کنید.

مدرس: افخمی

$$y = |\cos x|$$



پویش علمی
ماندگار البرز



پویش علمی دبیرستان ماندگار البرز

$$\sin(\alpha + \beta) = \overset{\text{Cos}}{\sin \alpha \cos \beta} + \overset{\text{Sin } \alpha}{\cos \alpha \sin \beta}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \overset{\text{Cos}}{\cos \alpha \cos \beta} - \overset{\text{Sin } \alpha}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

مردانم

پویش علمی
ماندگار البرز $\alpha = \beta$ 

جمع

$$(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\alpha = \beta \rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

دو

تفاضل

$$\alpha = \beta \rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \end{array} \right.$$

$$(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

مثال ۱: مقدار $\cos \frac{\pi}{12}$ را بدست آورید.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

مدرس: افخمی

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۹: اگر $\cos x = \frac{3}{4}$ و x در ناحیه چهارم باشد مقدار $\sin 2x$ را بدست آورید.

مدرس: افخمی

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \left(-\frac{\sqrt{7}}{4} \right) \times \frac{3}{4} = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

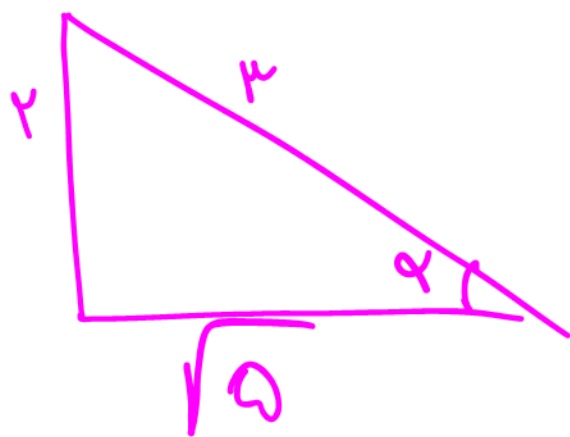


پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۱۱: فرض کنید $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، در این صورت، مقدار $\cos 2\alpha$ را تعیین کنید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$



مثال ۱۲: اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و انتهای زاویه رو به‌رو به α در ناحیه دوم باشد، مقدار عددی عبارت

$$A = 16 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos 2\alpha$$

را بیابید.

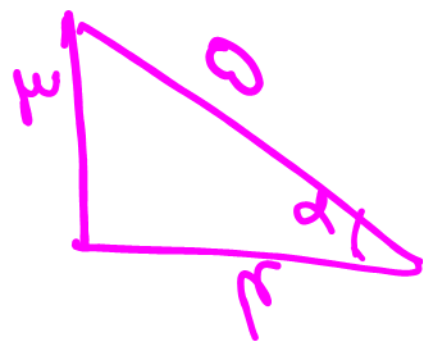


پویش علمی
ماندگار البرز



$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$A = 16 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \cos 2\alpha = 4 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \sin 4\alpha$$



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{4}{5} \right)$$

$$\cos 2\alpha = ?$$

$$= 2 \sin 4\alpha$$



مثال ۱۳: ثابت کنید: $1 - \cos \alpha = 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \left[\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right]$

a : $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}) + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$
 $= \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

b : $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$
 $1 + \cos \alpha = 1 + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \left[\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right]$

مدرس: افخمی

$= (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

مثال ۱۶: اگر بازه $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

مدرس: افخمی



پویش علمی
ماندگار البرز



پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

$$\begin{aligned} 2 < 2x + 3 & \quad 2 < x - 1 \\ \hline x > -\frac{1}{2} & \quad x < 3 \end{aligned}$$

$$ج. : \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

مثال ۱۷: آیا تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ در نقطه $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

مدرس: افخمی



پویش علمی
ماندگار البرز



پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

صدا داریم. مین تابع در حد $x=1$ را
تربیتی ندارد

مثال ۱۸: با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 2$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L-1$$

الف) حدود $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را مشخص کنید.

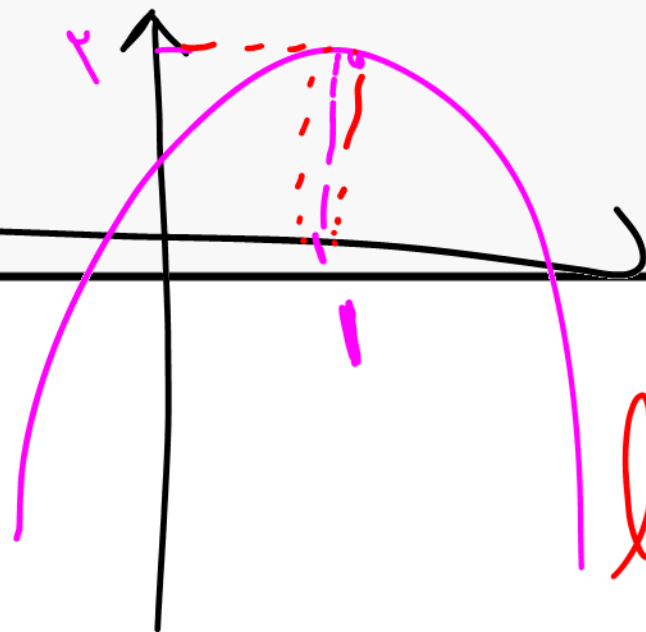
ب) از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$[2] = 2$$

$$[2^-] = 1$$

نمودار، f در $x=a$ به $\max$ برسد
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
 دستیغ

مدرس: افخمی

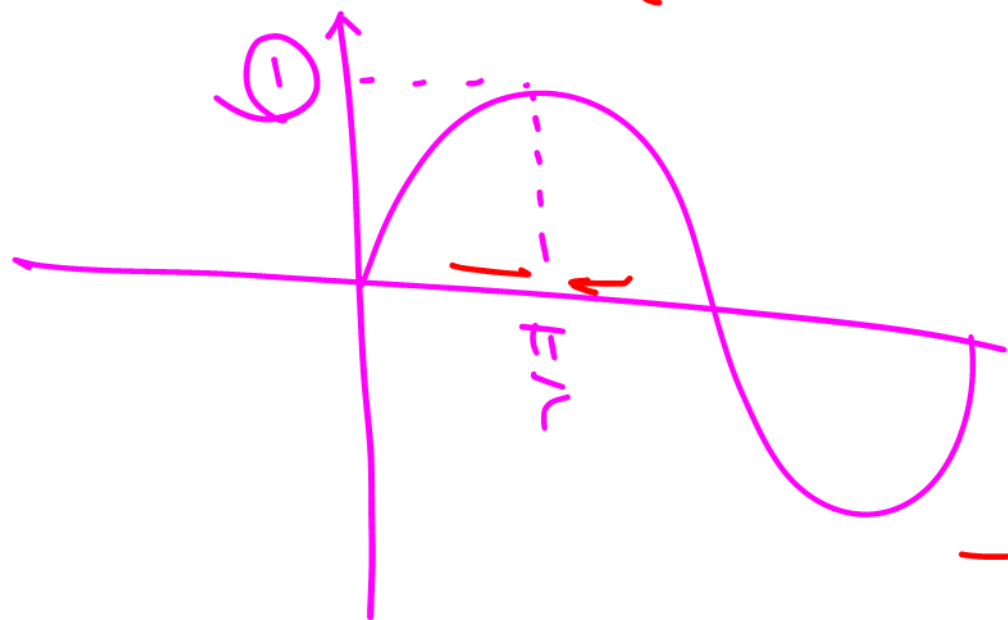


مثال ۱۹: اگر $f(x) = \sin x$ باشد، $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [f(x)]$ را بیابید.

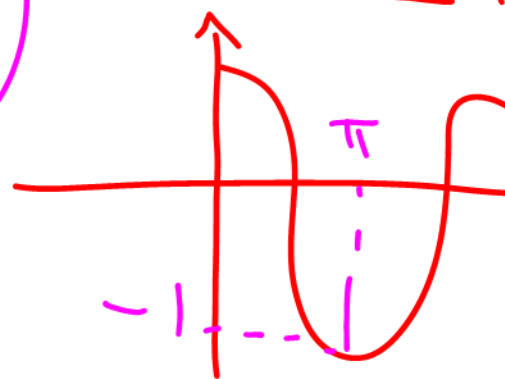
مدرس: افخمی

$$[1^-] = 0$$

$$[1^-] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \pi} [S_x] = 1$$



پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۲۰: مقدار حد تابع $f(x) = \begin{cases} 4 \sin 2x + 1 & ; x > \frac{\pi}{12} \\ 4 \tan 3x - 1 & ; x < \frac{\pi}{12} \end{cases}$ را در $x = \frac{\pi}{12}$ در صورت وجود بیابید.

مدرس: افخمی



پویش علمی
ماندگار البرز



$x = \frac{\pi}{12}$ در صورت: $4 \sin \frac{\pi}{6} + 1 = 3$
 $x = \frac{\pi}{12}$ در صورت: $4 \tan \frac{\pi}{4} - 1 = 3$
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} f(x) = 3$

مثال ۲۰: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{3x\cancel{(x+1)}} = -\frac{3}{4} \quad \text{①}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۲۱: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x - 5} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{(3x-5) - 4}$$

$$= \frac{4(5)}{1} = 1$$



پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۲۲: حاصل‌حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})} = \frac{1}{3}$$

$$\underline{a^3 + b^3} = (\underline{a + b})(\underline{a^2 - ab + b^2})$$



پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۲۳: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x]) \sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} =$$

$(x-3)^2$ (with an arrow pointing to the square root term)
 $\sqrt{}$ (with a pink slash over the term $3 - [x]$)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = 1$$

منفی (written above the first $|x-3|$)

مثال ۲۴: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 \cancel{[x]} - 8}{\underbrace{x^2 - x - 2}_{(x-2)(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{|(x-2)(\cancel{x+1})|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \cancel{(x-2)} (x+2)}{\cancel{x} (x-2)} = \frac{1}{2}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۲۴: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cancel{\cos x + \sin x})}{(\cancel{\cos x - \sin x})(\cancel{\cos x + \sin x})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)$$



پویش علمی
ماندگار البرز



مثال ۲۴: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 + \sin x} \times \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x (\sqrt{1 - \sin x})} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال ۲۴: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$x < 0 \rightarrow 2x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 - 2\cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x \sqrt{2(1 + \sin 2x)}}{\sqrt{2(1 - \sin 2x)} \times \sqrt{2(1 + \sin 2x)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{\sin 2x} \sqrt{2(1 + \sin 2x)}}{2 \cancel{|\sin 2x|}} = \frac{2}{2} = 1$$

(۱) (۱) صحیح

مثال ۲۴: حاصل‌حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi} =$$



پویش علمی
ماندگار البرز

